INSTITUTO PROVINCIAL DE SEGUNDA ENSEÑANZA DE LÉRIDA.

PROGRAMA

DE

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA,

CON ARREGLO Á LA OBRA

DEL

Dr. D. Acisclo Fernández Vallin y Bustillo.

LÉRIDA.

IMPRENTA Y LIBRERÍA DE JOSÉ PLÁ PAGÉS.

1894.

INSTITUTO PROVINCIAL DE SEGUNDA ENSEÑANZA DE LÉRIDA.

PROGRAMA

DE

GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA,

CON ARREGLO Á LA OBRA

DEL

Dr. D. Acisclo Fernández Vallin y Bustillo.

LÉRIDA.

IMPRENTA Y LIBRERÍA DE JOSÉ PLÁ PAGÉS.

1894.

Los tratados de ARITMÉTICA, ÁLGEBRA, GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA Y TOPOGRAFÍA, de que se compone esta obra, han sido aprobados para texto en las Universidades, Institutos y Escuelas especiales por el Real Consejo de Instrucción pública y por la Junta de Profesores del Real Instituto Industrial; por los MM. RR. Arzobispos y RR. Obispos de varias diócesis del Reino y Ultramar; por el Gobierno Superior civil de la isla de Cuba, oida la inspección de Estudios; por los Jefes superiores de varias Repúblicas hispano-americanas; y últimamente por el Gobierno de Portugal en virtud del dictámen del Consejo de Instrucción pública de S. M. F.

GEOMETRIA.

1. *Nociones preliminares.* Pág. 7.

Definición de la GEOMETRÍA.
La extensión considerada en los objetos materiales.
Dimensiones de la extensión: longitud, latitud y altura.
Generación de la superficie, de la línea y del punto matemático.
Cantidad y forma de la extensión
Volumen, área y longitud.
Del punto matemático ó geométrico.
Líneas rectas y curvas: sus propiedades más notables.
Distancia entre dos puntos dados.
Líneas quebradas y mixtas.
Superficies planas y curvas: propiedades de unas y otras.
Superposición directa é inversa.
Superficies quebradas y mixtas.
Igualdad de dos figuras, fundada en la coincidencia de su superposición.
Figuras planas. Curvas de doble curvatura.
División de la Geometria en plana y del espacio.

GEOMETRIA PLANA.

LÍNEA RECTA.

2. *Ángulos.* Pág. 12.

Definición del ángulo.
La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados.
Ángulos iguales adyacentes, rectos, agudos, obtusos, complementarios y suplementarios.
Los ángulos adyacentes son suplementarios.
Valor de los ángulos formados al rededor de un punto.
Angulos opuestos por el vértice: su igualdad.

3. *Perpendiculares y oblícuas.* Pág. 13.

Diferentes posiciones de dos rectas sobre un plano.
Perpendiculares, oblicuas y paralelas.
Por un punto dado en una recta ó fuera de ella, no se le puede trazar más que una sola perpendicular.
Si desde un punto fuera de una recta se trazan á esta una perpendicular, y diferentes oblicuas, la perpendicular es más corta que todas; las oblicuas, que se separen igualmente de la perpendicular, son iguales, y la oblicua que más se separe es la mayor (*).
Distancia desde un punto á una recta.
Si en el punto medio de una recta se levanta á esta una perpendicular, un punto cualquiera de la perpendicular equidistará de los extremos de la recta primera; y todo punto que no sea de la perpendicular no equidistará de dichos extremos.
Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados.
Lugar geométrico de un punto.

(*) Entiéndanse comprendidos en cada teorema su recíproco y los corolarios de uno y otro, puesto que el objeto del PROGRAMA es tan solo la exposición de las principales verdades de la ciencia.

4. *Rectas paralelas.* Pag. 16.

Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas.
Dos rectas, una perpendicular y otra oblicua á una tercera, no son paralelas.
Consecuencias de una y otra proposición.
Angulos que forman dos rectas paralelas, ó no paralelas, cortadas por una secante ó transversal.
Si dos rectas paralelas se cortan por una secante, los ángulos alternos son iguales, los correspondientes también lo son, y los internos ó externos de un mismo lado de la secante valen juntos dos rectos; y recíprocamente.
Lo contrario se verifica, si las rectas no son paralelas.
Las partes de paralelas interceptadas entre otras paralelas, son iguales.
Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales ó suplementarios.
Lo mismo se verifica, si los lados del uno son respectivamente perpendiculares á los del otro.

CIRCUNFERENCIA.

5. *Definiciones y propiedades generales de la circunferencia.* Pag. 19.

Definición de la circunferencia.
Radios, diámetros, arcos, cuerdas, secantes y tangentes.
Circunferencias iguales.
Circunferencias concéntricas.
En una misma circunferencia, ó en circunferencias iguales, se verifican las propiedades siguientes:
El diámetro es la mayor de las cuerdas.
Todo diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales.
A arcos iguales corresponden cuerdas iguales.
A mayor arco corresponde mayor cuerda.
Todo diámetro perpendicular á una cuerda la divide en dos partes iguales, y lo mismo á los arcos correspondientes; y recíprocamente.
Las cuerdas iguales equidistan del centro; y de las desiguales, la mayor se acerca más al centro.
Tres puntos que no están en línea recta, determinan la posición de una circunferencia.

Si una recta y una circunferencia son tangentes, la recta será perpendicular al radio correspondiente al punto de contacto: y recíprocamente.
Por un punto dado en una circunferencia no se puede trazar más que una recta tangente á la misma circunferencia.

6. *Circunferencias secantes y tangentes.* Pág 22.

Circunferencias secantes.
Circunferencias tangentes.
Dos circunferencias no pueden tener más que dos puntos comunes.
Dos circunferencias secantes tienen su cuerda común perpendicular á la línea de los centros; y si son tangentes tienen su punto de contacto en la línea de los centros.
Posiciones relativas de dos circunferencias sobre un plano, y comparación de la distancia de sus centros con la suma ó la diferencia de sus radios.

7. *Medida de los ángulos.* Pág. 23.

Medida de un ángulo.
En una misma circunferencia, ó en circunferencias iguales, los ángulos centrales son proporcionales á los arcos correspondientes (*).
Luego la medida de un ángulo es la misma que la del arco interceptado entre sus lados y descrito desde su vértice con un radio cualquiera.
Unidad angular.
División de la circunferencia en partes iguales.
Angulo inscripto: su medida es la mitad del arco que abrazan sus lados.
Ángulo del segmento: su medida es la mitad del arco que abrazan sus lados.
Ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados son una cuerda y la prolongación de otra: su medida es la semi-suma de los arcos que corresponden á ambas cuerdas.
Ángulo que tiene su vértice dentro de la circunferencia: tiene por medida la semi-suma de los arcos interceptados por sus lados prolongados.

(*) Bastará demostrar este teorema en el caso de ser los arcos conmensurables, entendiéndose lo mismo en todas las demostraciones análogas.

Ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia y cuyos lados son dos secantes, una tangente y una secante, ó dos tangentes: tiene por medida la semi-diferendia de los arcos que abrazan sus lados.

POLÍGONOS.

8. *Preliminares relativos á los polígonos.* Pág. 26

Definición de la figura llamada *polígono*..
Lados, ángulos perímetro, vértices, diagonales, base y altura de un polígono.
Caracteres de los polígonos convexos.
Nombres de los polígonos según el número de sus lados.
Polígonos equiláteros, equiángulos, regulares é irregulares.

9. *Triángulos y sus propiedades.* Pág. 27.

Los triángulos pueden ser equiláteros, isósceles, escalenos, rectángulos, obtusángulos y acutángulos.
En todo triángulo se verifican las siguientes propiedades:
Un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
La suma de sus ángulos es igual á dos ángulos rectos.
A lados iguales se oponen ángulos iguales.
A mayor lado se opone mayor ángulo.
Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los tres lados se encuentran en un mismo punto; y las bisectrices de sus ángulos tienen la misma propiedad.

10. *Triángulos iguales.* Pág. 29.

Figuras iguales.
Identidad y simetría.
Angulos homólogos y lados homólogos de dos figuras iguales.
Dos triángulos son iguales cuando tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, un lado y los dos ángulos adyacentes, ó bien los tres lados.
Casos de igualdad de dos triángulos rectángulos.
Si en uno de los lados de un ángulo se toman partes iguales y por los puntos de división se trazan paralelas entre sí, interceptarán en el otro lado partes también iguales.

11. *Triángulos semejantes.* Pág. 30.

Figuras semejantes.
Lados homólogos y ángulos homólogos de dos figuras semejantes.
Toda recta paralela á uno de los lados de un triángulo divide á los otros dos en partes proporcionales, y recíprocamente.
Si se traza una paralela á uno de los lados de un triángulo, resulta otro parcial semejante al triángulo dado.
Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales, dos lados proporcionales é igual el ángulo que forman, ó bien los tres lados proporcionales.
Casos de semejanza de dos triángulos rectángulos.
Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, los triángulos parciales que resultan son semejantes al total y semejantes entre sí.
Consecuencias que resultan de la comparación de los lados homólogos de estos triángulos.

12. *Cuadriláteros.* Pág. 32.

Los cuadriláteros se dividen en trapezoides, trapecios y paralelógramos.
El paralelógramo tiene los lados opuestos iguales y los ángulos opuestos también iguales. Se divide por lo tanto en rectángulo, cuadrado, rombo y romboide.
La suma de los ángulos de todo cuadrilátero es igual á cuatro ángulos rectos.
Un cuadrilátero será paralelógramo, si tiene los ángulos opuestos iguales; los lados opuestos iguales; ó dos lados iguales y paralelos.
Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes iguales.
En el cuadrado y rectángulo las diagonales son iguales.
En el cuadrado y rombo las diagonales son perpendiculares entre sí (*).

13. *Igualdad de los cuadriláteros.* Pág. 33.

Dos cuadriláteros serán iguales si tienen respectiva y ordenadamente iguales los cuatro lados y un ángulo homólogo;

(*) La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela á las bases é igual á su mitad.

tres lados y los ángulos comprendidos por ellos; ó bien dos lados contiguos y los ángulos adyacentes á estos lados.
En los paralelógramos bastan dos lados contiguos y el ángulo que forman; en los rectángulos dos lados contiguos, y en los cuadrados solo un lado.

14. *Semejanza de los cuadriláteros.* Pág. 33.

Dos cuadriláteros son semejantes si los triángulos en que se pueden dividir lo son también y están igualmente colocados.
Los paralelógramos son semejantes cuando tienen un ángulo del uno igual á un ángulo del otro y proporcionales los lados que le forman.
Los rectángulos son semejantes si tienen las bases y alturas proporcionales.
Los rombos son semejantes si tienen un ángulo igual.
Los cuadrados son todos semejantes.

15. *Polígonos en general.* Pág. 34.

Todo polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene menos dos, ó en tantos como lados tiene.
La suma de todos los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos. Fórmula.
Ángulos externos de un polígono. Su suma es igual á cuatro rectos.
Radios y apotemas de los polígonos regulares.
Formar una tabla del valor de cada uno de los ángulos interiores y exteriores de los diez primeros polígonos regulares.

16. *Igualdad de los polígonos.* Pág. 35.

Dos polígonos son iguales si constan del mismo número de triángulos respectivamente iguales y de la misma manera colocados.
En los polígonos regulares, y de un mismo número de lados, basta que tengan un lado del uno igual á un lado del otro para que lo sean también los polígonos.
Casos de igualdad de dos polígonos de n lados.

17. *Semejanza de los polígonos.* Pág. 35.

Dos polígonos son semejantes cuando se pueden descomponer en el mismo número de triángulos, respectivamente semejantes y de la misma manera colocados.

Los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus lados y rectas homólogas.
Los perímetros de los polígonos regulares semejantes, son entre sí como sus radios y apotemas.

18. *Figuras circulares.* Pág. 36.

Definiciones del círculo, corona ó anillo sector, circular, segmento circular y trapecio circular.
Si dos cuerdas se cortan dentro de la circunferencia, las partes de la una son recíprocamente proporcionales á las partes de la otra.
Si desde un punto fuera de la circunferencia se trazan dos secantes (que terminen en los segundos puntos de intersección), dichas secantes y sus segmentos externos son inversamente proporcionales.
Si desde un punto fuera de la circunferencia se trazan una tangente y una secante (que terminen la primera en el punto de contacto, y la segunda en el segundo punto de intersección), la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.
Los círculos son iguales si tienen los radios iguales.
Igualdad de las coronas, sectores y demás figuras circulares.
Todos los círculos son semejantes.
Semejanza de las demás figuras circulares.

19. *Polígonos inscriptos y circunscriptos en el círculo.* Pág. 37.

Definición de los polígonos inscriptos en el círculo.
Polígonos circunscriptos á un círculo.
Todo triángulo se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro.
En todo cuadrilátero inscripto en un círculo, los ángulos opuestos son suplementarios, y recíprocamente.
En todo cuadrilátero inscripto en un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos, y recíprocamente.
El rombo es siempre circunscriptible.
Todo polígono regular se puede inscribir en un círculo y circunscribir á otro.
Si una circunferencia se divide en partes iguales, y por los puntos de división se trazan cuerdas ó tangentes, el polígono inscripto ó circunscripto formado por ellas, será regular
La circunferencia es el límite superior de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, y el límite inferior de los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos á ella.

Las circunferencias son proporcionales con sus radios.
Razón de la circunferencia al diámetro.
La razón de la circunferencia al diámetro es constante, sea cualquiera la magnitud del radio. Fórmulas.
Valor aproximado de *pi*.

20. *Fórmulas del lado de algunos polígonos regulares.* Pág. 40.

El lado del exágono regular es igual al radio R.
El lado del triángulo equilátero es $R\sqrt{3}$.
El lado del cuadrado es igual á $R\sqrt{2}$.
*El lado del decágono regular es $\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$
*El lado del pentágono regular es $\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
Hallar la longitud del lado de estos polígonos cuyo radio es conocido; y también el radio en función del lado.
Reglas prácticas para inscribir en un círculo los polígonos regulares anteriores.

ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

21. *Áreas de los polígonos.* Pág. 41.

Área de una figura. Unidad superficial. Figuras equivalentes.
Los rectángulos de bases iguales son proporcionales á sus alturas, y si tienen iguales alturas son proporcionales á sus bases.
Dos rectángulos cualesquiera son como los productos de sus bases por sus alturas.
El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.
El área de un paralelógramo es también igual á su base por su altura.
El área de un triángulo es la mitad del producto de su base por su altura.
El área de un trapecio es igual á la mitad del producto de sus bases por su altura.
El área de un polígono irregular es igual á la suma de las áreas de los triángulos y cuadriláteros en que puede descomponerse.
El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por la apotema.

22. *Areas de las figuras circulares.* Pág. 43

El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio. Fórmula (*).
El área de un círculo, cuyo radio es la unidad, es igual á *pi*.
El área de una corona es la diferencia entre las áreas de sus dos círculos.
El área de un sector circular es igual á la mitad del arco que le sirve de base por el radio.
El área de un segmento circular es la diferencia entre las áreas del sector y del triángulo correspondientes.
El área de un trapecio circular es la diferencia de las áreas de los sectores respectivos. Fórmulas.

23. *Comparación de las áreas de las figuras semejantes.* Pág. 44.

Las áreas de las figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados ó líneas homólogas.
Las áreas de los círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios.

24. *Equivalencia de las figuras planas.* Pág. 45.

Figuras equivalentes.
Todo triángulo es la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.
Todos los triángulos, ó todos los pararelógramos, de igual base é igual altura, son equivalentes.
El rombo es mitad del paralelógramo construído sobre sus diagonales.
El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo equivale á la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.
Equivalencia del cuadrado construído sobre la suma de dos rectas.
Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, considerados como homólogos, se construyen tres polígonos semejantes, el construido sobre la hipotenusa equivale á la suma de los otros dos.

(*) La demostración de este teorema se puede fundar en un sencillo raciocinio, si convenimos en considerar al círculo como un polígono de infinito número de lados.

PROBLEMAS (*).

25. *Problemas sobre los ángulos.* Pág. 48.

Construir un ángulo igual á otro dado.
Construir un ángulo, duplo, triplo, cuádruplo, etc. de otro dado.
Dividir un ángulo en otros dos iguales, ó trazar su bisectriz.
Hallar la bisectriz del ángulo que formarían dos rectas si se prolongasen lo suficiente para encontrarse.

26. *Problemas sobre las perpendiculares.* Pág. 49.

Trazar una perpendicular á una recta dada, que pase por un punto dado en la misma recta.
Trazar una perpendicular á una recta dada, que pase por un punto dado fuera de dicha recta.
Trazar una perpendicular á una recta dada en su punto medio, ó dividir esta recta en dos partes iguales.
Trazar una perpendicular á una recta dada y que pase por uno de sus extremos.

27. *Problemas sobre las paralelas.* Pág. 50.

Trazar una paralela á una recta dada, bien sea por medio de las perpendiculares, por la igualdad de los ángulos alternos, ó por la igualdad de los correspondientes.
Por un punto dado trazar á dos paralelas una secante tal, que la parte interceptada por las paralelas sea igual á una recta dada.

28. *Problemas sobre las rectas proporcionales.* Pág. 51.

Divir una recta en partes iguales:
Dividir una recta en partes proporcionales á otras dadas.
Hallar una cuarta proporcional á las rectas *m*, *n*, y *p*.
Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas *m* y *n*.
Hallar una media proporcional entre las rectas dadas *m* y *n*.
Dividir una recta en media y extrema razón.

(*) Preliminares acerca de los problemas geométricos; su división en gráficos y numéricos.

29. *Problemas relativos á la circunferencia.* Pág. 52.

Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco dado.
Trazar por un punto dado una recta tangente á una circunferencia.
Trazar una circunferencia tangente á una recta en un punto dado y que pase además por un punto también dado.
Trazar una circunferencia tangente á otra dada en el punto A y que pase además por otro punto dado.
Trazar una recta tangente á dos circunferencias dadas.

30. *Construcción de triángulos.* Pág. 53.

Construir un triángulo dados los tres lados.
Construir un triángulo dados los dos lados y el ángulo comprendido.
Construir un triángulo dado un lado y los ángulos adyacentes.
Construir un triángulo conociendo dos lados *m* y *n* y el ángulo opuesto á uno de ellos.

31. *Construcción de cuadriláteros.* Pág. 54.

Construir un romboide dados dos lados contiguos ó adyacentes y el ángulo comprendido.
Construir un rectángulo conocidos dos lados adyacentes.
Construir un rombo conocido un ángulo y un lado.
Construir un cuadrado sobre un recta dada.
Construir un rombo dadas sus diagonales.
Construir un cuadrilátero, dados tres lados y los ángulos comprendidos en ellos, ó bien tres ángulos y los dos lados adyacentes.
Construir un cuadrilátero dados los cuatro lados y un ángulo.

32. *Construcción de polígonos en general.* Pág. 54.

Construir sobre una recta dada un polígono regular (*).
Cubrir una superficie plana con polígonos regulares.
Construcción de un polígono irregular.
Construir un polígono idéntico á otro dado.
Construir un polígono simétrico con otro dado.

(*) Construcción de polígonos estrellados.

33. *Construcción de figuras semejantes á otras dadas.* Pág.

Construir un triángulo semejante á otro.
Construir un triángulo semejante á otro, sobre una recta dada.
Construcción de un polígono semejante á otro dado.
Construir un polígono semejante á otro, sobre una recta dada.

34. *Construcción de figuras equivalentes á otras dadas.* Pág. 56.

Reducir un polígono á otro que tenga un lado menos.
Reducir un círculo á triángulo.
Cuadrar un triángulo, un paralelógramo, un trapecio, un polígono cualquiera regular ó irregular, un círculo y por último un sector circular.
Construir un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos.
Construir un círculo equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos.
Dividir un círculo en partes equivalentes.
Construir un polígono equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos, siendo todos semejantes entre sí.

35. *Construcción de figuras proporcionales á dos rectas dadas.* Pág. 58.

Construir un cuadrado que tenga con otro dado la misma razón que las rectas *m* y *n*.
Construir un círculo que tenga con otro dado la razón de *m*: *n*.
Dividir un triángulo en otros proporcionales á dos ó más rectas ó números dados.

36. *Problemas numéricos relativos á las líneas.* Pag. 59.

Hallar la razón de la circunferencia al diámetro deduciendo antes las fórmulas, para, dado el lado de un polígono regular inscripto en una circunferencia hallar el lado del inscripto de duplo número de lados y el del polígono circunscripto semejante (*).
¿Cuántos lados tiene un polígono cuyos ángulos interiores valen juntos tanto como veinte ángulos rectos?

(*) Hallar gráficamente una recta cuya longitud sea igual á la de una circunferencia dada.

Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen tres metros el uno y cuatro el otro.
Calcular la altura y los catetos de un triángulo rectángulo si los segmentos de la hipotenusa tienen de longitud tres y cinco metros.
¿Cuanto vale la diagonal de un cuadrado cuyo lado es de diez metros?
¿Cuál es la longitud del radio del meridiano de Madrid, suponiendo la Tierra perfectamente esférica?
¿Cuál es la distancia entre dos lugares situados en el Ecuador, cuya diferencia de longitud sea de 4° y 10'?
Hallar el número n de grados de un arco, cuyo radio es conocido, para que su longitud sea igual á una circunferencia dada.
Dadas dos circunferencias concéntricas, calcular la cuerda de la mayor, que sea tangente á la menor.

37. *Problemas numéricos relativos á las áreas de las figuras planas.* Pág. 62.

¿Cuántos metros cuadrados de alfombra se necesitan para cubrir una sala rectangular que tiene 20 metros de largo y 12 de ancho?
¿Cual es la extensión de un terreno trapecial, suponiendo la altura 200 metros, 150 metros la base mayor y 110 la menor?
Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado es de 10 metros.
Transformar un rombo, cuyas diagonales son 100 y 60 metros en un rectángulo equivalente.
Hallar el área de un círculo cuya circunferencia tiene 1 metro de longitud.
Hallar el radio de un círculo cuya área es de 100 metros cuadrados.
Hallar el radio de un círculo equivalente á otros tres cuyos radios tienen de longitud 20, 28 y 29 metros.
Hallar el lado L de un cuadrado equivalente á un círculo.
Calcular el radio de un círculo equivalente á un cuadrado dado.
Hallar la razón entre las áreas de un círculo y un cuadrado isoperímetros.
Si el círculo y el cuadrado tienen la misma área, ¿cuál será la razón entre los perímetros? (*)

(*) Los alumnos sobresalientes deben resolver el mayor número de los ejercicios del libro de texto, páginas 64, 65 y 66

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

RECTAS Y PLANOS.

38. *Rectas perpendiculares, oblicuas, y paralelas á un plano.* Pág. 67.

Determinación de un plano.
Intersección de una recta y un plano, y de dos planos entre sí.
Condiciones de una recta y un plano para ser perpendiculares, oblicuos ó paralelos.
Si una recta es perpendicular á otras dos, que se cruzan por su pié en un plano, es perpendicular á este plano.
Por un punto dado en el espacio no puede trazarse mas que una recta perpendicular á un plano, ni tampoco podrá trazarse mas que un plano perpendicular á una recta dada.
Perpendiculares y oblicuas á un plano, trazadas desde un punto dado fuera de dicho plano.
Si desde el pié de una perpendicular á un plano se traza otra perpendicular á una recta, dada en dicho plano, y se une el punto común de estas rectas con otro cualquiera de la perpendicular primitiva, la última recta será perpendicular á la trazada desde un principio en el plano.
Por un punto del espacio no puede pasar más que una sola paralela á otra recta dada.
Si una recta es perpendicular á un plano, toda recta paralela á la primera será perpendicular al mismo plano.
Una recta paralela á otra trazada en un plano es paralela á este plano.
Proyección de un punto y de una línea cualquiera sobre un plano.
Angulo de una recta con un plano.

39. *Angulos diedros.* Pág. 70.

Definición del ángulo diedro y nombres de sus elementos.
Angulos diedros iguales.
Angulos diedros adyacentes, rectos, agudos, obtusos, complementarios, suplementarios y opuestos por su arista.
Angulos rectilíneos correspondientes á un diedro: son todos iguales.

Si dos ángulos diedros son iguales, los rectilíneos correspondientes también lo serán. A mayor diedro corresponde mayor rectilíneo.
Los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos correspondientes.
Medida de un ángulo diedro.

40. *Planos perpendiculares, oblicuos y paralelos entre sí.* Pág. 71.

Definición de los planos perpendiculares entre sí, oblicuos y paralelos.
Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por ella será también perpendicular al primero.
Si dos planos son perpendiculares entre sí, las perpendiculares á uno de ellos, trazadas por diferentes puntos de la intersección común, estarán todas en el otro plano.
Luego si dos planos son perpendiculares á un tercero, la intersección común también lo será.
Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos, y la intersección de dos planos paralelos con un tercer plano son rectas paralelas.
Consecuencias de esta proposición.
Rectas y planos verticales y horizontales.

41. *Angulos poliedros.* Pág. 72.

Definición del ángulo poliedro.
Vértices, caras, aristas, ángulos planos y diedros de un ángulo poliedro.
Angulos poliedros suplementarios. Angulos poliedros regulares.
Angulos triedros. Descomposición de un ángulo poliedro en tantos triedros como caras tiene, ó en tantos tiedros como caras tiene menos dos.
En todo ángulo triedro se verifican las propiedades que siguen:
Un ángulo plano es menor que la suma de los otros dos.
A todo ángulo triedro corresponde otro triedro suplementario.
La suma de los tres ángulos planos es menor que cuatro rectos.
La suma de los tres diedros es mayor que dos rectos y menor que seis.
Igualdad de los ángulos triedros.

SUPERFICIES CURVAS.

42. *Superficies curvas de revolución.* Pág. 74.

Generación de las superficies curvas, que se consideran en la Geometría elemental.
Superficies regladas.
Superficies de revolución: cónicas, cilíndricas y esférica s.
Plano tangente de una superficie de revolución.
Generación de la superficie cónica de revolución.
Su intersección con un plano perpendicular, oblicuo y paralelo al eje.
Secciones cónicas.
Desarrollo de la superficie cónica y cilíndrica de revolución.
Su intersección con un plano perpendicular, oblicuo ó paralelo al eje.
Desarrollo de la superficie cilíndrica sobre un plano.

43. *Superficie esférica.* Pág. 76.

Generación de la superficie esférica.
Eje, polos, centro, radios y diámetros de la superficie esférica.
Intersección común de la superficie esférica y un plano.
Circunferencias máximas y menores. Sus propiedades.
Polos de una circunfenrecia.
Planos y rectas tangentes de una superficie esférica.
Contacto é intersección de dos superficies esféricas.
Angulo esférico: su medida.
Triángulo esférico: puede tener uno, dos ó tres ángulos rectos ú obtusos.
La línea más corta que se puede trazar sobre la superficie esférica entre dos puntos de la misma, es el arco menor de circunferencia máxima, que pasa por ellos (*).

POLIEDROS.

44. *Preliminares relativos á los poliedros.* Pág. 78.

Definición de los poliedros en general.

(*) Si desde un punto de la superficie esférica se traza, con una abertura constante de compás, una curva sobre la misma superficie, esta curva será una circunferencia y el punto fijo uno de sus polos.

Caras, aristas, vértices, diagonales, base y altura de un poliedro.
Nombres de los poliedros según el número de sus caras.
Poliedros regulares.
Area lateral y total de un poliedro.

45. *Pirámides.* Pág. 78.

Definición de la pirámide.
Pirámide triangular, cuadrangular, rombal, pentagonal, etc. según la figura de la base.
Pirámide regular: su apotema.
Toda pirámide puede descomponerse en tantos tetraedros como lados tiene el polígono de su base, ó en tantos como lados tiene menos dos.
Teoremas que resultan de cortar una pirámide por un plano paralelo á la base.
Trozo de pirámide.
El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del perímetro de la base por la apotema de la pirámide.
Área total.
Area lateral y total de un trozo de pirámide.
Desarrollo sobre un plano de la superficie lateral y total de una pirámide y de un trozo de pirámide.

46. *Prismas.* Pág. 80.

Difinición del prisma.
Caras laterales, bases y altura del prisma.
Prismas rectos, oblicuos, regulares é irregulares.
Prismas triangulares, trapeciales, rombales, exagonales, según la figura de sus bases.
Paralelepípedo y cubo. Sus propiedades.
Todo prisma puede descomponerse en tantos prismas triangulares como lados tiene su base; ó en tantos como lados tiene menos dos.
El área lateral de un prisma es igual al producto de una de sus aristas laterales por el perímetro de una sección que le sea perpendicular.
El área lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura por el perímetro de una de sus bases.
Area total.
Desarrollo sobre un plano de la superficie lateral y total de un prisma.

47. *Poliedros en general.* Pág. 81.

Todo poliedro se puede descomponer en pirámides, y por consiguiente en tetraedros.
No hay más que cinco poliedros regulares, y estos son el tetraedro, exaedro, octaedro, dodecaedro y el icosaedro.
Relación del número de aristas, caras y vértices de los poliedros regulares.
Area lateral y total de un poliedro cualquiera.
El área total de un poliedro regular es igual al producto del área de una cara por el número de ellas.
Apotema y centro de un poliedro regular.

48. *Igualdad y semejanza de los poliedros.* Pág. 83.

Poliedros iguales.
Dos tetraedros son iguales si lo son respectivamente: una cara y los ángulos diedros adyacentes; dos caras y el ángulo diedro comprendido; las tres caras; ó bien todas las aristas.
Los poliedros regulares de igual número de caras son iguales, si tienen una arista igual.
En los poliedros regulares no hay diferencia entre la identidad y la simetría.
Poliedros semejantes.
Dos tetraedros son semejantes si tienen: una cara semejante é iguales los ángulos diedros adyacentes; dos caras semejantes é igual el ángulo diedro comprendido; tres caras semejantes, ó bien los ángulos diedros iguales.
Las áreas de los poliedros semejantes son como los cuadrados de sus aristas homólogas.

CUERPOS REDONDOS.

49. *Cono de revolución.* Pág. 84.

Generación del cono de revolución.
Trozo de cono.
Intersección de un cono y un plano secante.
Cono equilátero.
Plano tangente del cono.
El área lateral de un cono es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.
Area total. Fórmulas.

Area lateral y total de un trozo de cono de bases paralelas.
Igualdad y semejanza de dos conos.

50. *Cilindro de revolución.* Pág. 55.

Generación del cilindro de revolución.
Intersección de un cilindro y un plano secante.
Cilindro equilátero.
Plano tangente del cilindro.
El área lateral del cilindro es igual al producto de su lado ó altura por la circunferencia de su base.
Area total. Fórmulas.
Igualdad y semejanza de dos cilindros.

51. *Esfera.* Pág 86.

Generación de la esfera.
Toda sección de la esfera por un plano es un círculo.
Círculos máximos y menores de la esfera.
Sector y segmento esférico.
Planos tangentes de la esfera.
El área de la esfera es igual al producto de su diámetro por una circunferencia máxima. Fórmula.
El área de la esfera es cuádruple de la de uno de sus círculos máximos.
Las áreas de las esferas son como los cuadrados de sus radios.
Esferas iguales.
Todas las esferas son semejantes.
Poliedros inscriptos y circunscriptos en la superficie esférica.
Todo tetraedro es inscriptible y circunscriptible en la superficie esférica.
Los poliedros regulares se pueden también inscribir y circunscribir en una superficie esférica, y recíprocamente.

VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

52. *Volumen de los poliedros.* Pág. 88.

Volumen de un cuerpo. Unidad de volumen. Poliedros equivalentes.
Dos paralelepípedos rectos y rectángulos de bases iguales son proporcionales á sus alturas.
Si los paralelepípedos tienen alturas iguales serán como sus bases.
Si dos paralelepípedos no tienen ni bases ni alturas iguales

serán entre sí como los productos de sus tres dimensiones.
El volumen de un paralelepípedo es igual al producto de su base por su altura.
El volumen de un prisma es igual al producto de su base por su altura.
El volumen de una pirámide es igual al tercio del producto de su base por su altura.
Volumen de un poliedro cualquiera.
El volumen de un poliedro regular es igual al tercio del producto de su área por su apotema.
Los volúmenes de los poliedros semejantes son como los cubos de sus aristas y rectas homólogas.

53. *Volumen de los cuerpos redondos.* Pág. 90.

El volumen de un cono es igual al tercio del producto de su base por su altura. Fórmula (*).
El volumen de un cilindro es igual al producto de su base por su altura. Fórmula.
El volumen de la esfera es igual al tercio del producto de su área por su radio, ó también á dos terceras partes del diámetro por el área de un círculo máximo. Fórmulas.

54. *Equivalencia de los poliedros y cuerpos redondos.* Pág. 91

Dos pirámides, dos conos, ó una pirámide y un cono de una misma altura y bases equivalentes, son equivalentes.
Dos prismas, dos cilindros ó un prisma y un cilindro de una misma altura y bases equivalentes, son equivalentes.
Toda pirámide es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.
Considerando un cono y un cilindro equiláteros circunscriptos á una esfera, el cilindro será equivalente á dos terceras partes del cono, y la esfera lo será á dos tercios del cilindro ó á cuatro novenos del cono.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

55. *Areas de los poliedros y cuerpos redondos.* Pág. 92.

Calcular los metros de papel pintado que se necesitan para cubrir las paredes de un salón.

(*) El volumen de un trozo de cono de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y una media proporcional entre ellas.

¿Cuál es el área de un icosaedro regular, cuya arista es de 10 metros?
¿Cuál es el área de un cono cuya altura sea de 10 metros y la circunferencia de su base de 314 decímetros.
Hallar el lado de un cono equilátero cuya área lateral es 1 metro cuadrado.
¿Cuál es el radio de una esfera que tiene de superficie 1 metro cuadrado.
Hallar el área de la superficie de la Tierra en kilómetros cuadrados.

56. *Volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos.* Pág. 93.

Hallar el volumen de la más alta de las pirámides de Egipto que mide 145 metros de altura.
Calcular el número de piés cúbicos de agua que puede contener el estanque del Retiro de Madrid.
Hallar el volumen de un desmonte de 500 metros de longitud, siendo el ancho del camino 5 metros, la altura del desmonte 2 metros y medio, y su ancho por la parte superior 8 metros.
Hallar el lado de un cubo de doble volumen que otro dado.
Hallar el volumen de un cono de sal, cuya altura es de 15 metros y el radio de la base de 12.
Calcular la capacidad de un pozo cilíndrico, cuyo diámetro es de 2 metros y su profundidad de un hectómetro.
Hallar las dimensiones de un cilindro equilátero de un litro de capacidad.
Hallar el volumen de una esfera cuya área sea igual á dos hectáreas.
¿Cuántos kilogramos pesarán dos esferas, una de oro y otra de plata, suponiendo que el radio de la primera es 1 decímetro y el de la segunda 2 decímetros?
¿Cuál es el diámetro de una bala de 40 kilogramos?

TRIGONOMETRIA

RECTILINEA.

57. *Nociones preliminares.* Pág. 101.

Definición de la Trigonometría.
Su división en rectilínea y esférica.
Objeto de la resolución numérica de los triángulos.
Líneas trigonométricas.
División de la Trigonometría en dos partes; una que enseña la teoría de las líneas trigonométricas; y otra que trata de la resolución de los triángulos por medio del cálculo.

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

58. *Definición de las líneas trigonométricas.* Pág. 102.

Definiciones del seno y de la tangente trigonométrica de un arco ú ángulo cualquiera.
El seno de un arco es también la mitad de la cuerda del arco duplo.
Consecuencias que resultan de estas definiciones, relativamente á la variación del seno y de la tangente de un arco, que, empezando por cero grados, llega á 180°.
Definiciones del coseno y cotangente de un arco.
Arcos y líneas trigonométricas positivas y negativas.
Las líneas trigonométricas del primer cuadrante, se suponen siempre positivas: las opuestas á ellas son negativas.
Las líneas trigonométricas de dos arcos de igual magnitud, uno positivo y otro negativo, son respectivamente iguales, pero llevan signo contrario el seno, la tangente y la cotangente.

Las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son respectivamente iguales, pero llevan signo contrario el coseno, la tangente y la cotangente.
Tabla de los valores de las líneas trigonométricas, correspondientes á los arcos cero, uno, dos, tres y cuatro cuadrantes positivos.
Máximo y mínimo valor absoluto del seno, coseno, tangente y cotangente de un arco.
Una línea trigonométrica dada corresponde á una infinidad de arcos, uno menor y los demás mayores que un cuadrante de circunferencia.

59. *Fórmulas de las líneas trigonométricas de un arco.* Pág. 106.

Las relaciones que existen entre las líneas trigonométricas de un arco, son las siguientes:
El cuadrado ó segunda potencia del radio es igual á la suma de los cuadrados del seno y coseno.
La tangente es igual al radio por el seno, dividido por el coseno de dicho arco.
La cotangente igual al radio por el coseno, dividido por el seno del mismo arco.
Fórmulas que resultan de estos teoremas.
Otras fórmulas que se deducen de las anteriores.
Conocido el radio y el seno de un arco hallar las demás líneas trigonométricas del mismo arco (*).
Valores de las líneas trigonométricas de algunos arcos.
Transformación de las fórmulas anteriores, suponiendo el radio igual á la unidad.
Dada una fórmula en el supuesto de ser el radio igual á la unidad, transformarla en la correspondiente á otro radio mayor ó menor que la unidad.

60. *Fórmulas trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos arcos.* Pág. 109.

Deducir las fórmulas del seno y conseno de la suma y de la diferencia de dos arcos a y b, en función de los senos y cosenos de estos arcos.
Transformar en productos la suma y la diferencia de los senos y cosenos de dos arcos.
Su aplicación á la suma sen a+cos b.

(*) Conocido el radio y la tangente de un arco, hallar las demás líneas trigonométricas.

Deducir de las fórmulas anteriores el siguiente teorema.
(sen a+sen b) : (sen a—sen b) : : tang $\frac{1}{2}(a+b$: tang $\frac{1}{2}(a-b)$
Deducir las fórmulas de la tangente y cotangente de la suma y de la diferencia de dos arcos, en función de las tangentes de dichos arcos.
Transformar en producto la suma ó la diferencia de las tangentes, ó cotangentes de dos arcos.

61. *Fórmulas trigonométricas relativas á los múltiplos de un arco.* Pág. 112.

Deducir las fórmulas del seno y coseno del duplo, tríplo, cuádruplo, etc., de un arco, en función del seno y coseno de este arco (*).
Deducir las fórmulas de la tangente y cotangente de los múltiplos de un arco, en función de la tangente y cotangente de dicho arco.

62. *Fórmulas trigonométricas relativas á la mitad de un arco.* Pág. 115.

Deducir las fórmulas del seno y coseno de la mitad de un arco en función del seno y coseno de dicho arco.
Deducir las fórmulas de la tangente y cotangente de la mitad de un arco, en función del seno y coseno de este arco (**).

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

63. *Construcción de las Tablas trigonométricas.* Pág. 116.

Tablas trigonométricas.
Fórmulas que bastan para su construcción.
¿Cuál de las líneas trigonométricas conviene calcular directamente, y hasta que número de grados del arco?
Demostrar que todo arco menor que un cuadrante es mayor

(*) Si se conocen los valores del seno y coseno de los arcos $(n-1)\times a$ y $n\times a$ en función de sen a y cos a, se hallarán los del seno y coseno de $(n+1)\times a$, por las fórmulas llamadas de Simpson.

(**) Aplicación de las fórmulas anteriores á la división de la circunferencia en partes iguales.

Transformar, por medio de la introducción de los *ángulos auxiliares* una suma ó diferencia indicada en otra expresión bien dispuesta para el cálculo logarítmico.

que su seno y menor que su tangente: y también, que el seno de un arco menor que un cuadrante es mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte del cubo del mismo arco. Fórmulas.

Hallar el seno del arco igual á 1 minuto.

Deducir de este resultado la construcción de las tablas trigonométricas naturales de minuto en minuto.

Transformación de las tablas trigonométricas naturales en ordinarias y logarítmicas.

¿Porqué se supone dividido en 10000000000 de partes iguales el radio de las tablas trigonométricas logarítmicas?

64. *Disposición y uso de las Tablas trigonométricas ordinarias.* Pág. 119.

Disposición de las tablas trigonométricas logarítmicas.

Hallar los logaritmos de las líneas trigonométricas de un arco cualquiera de estas tablas.

Dado un logaritmo de las mismas tablas, hallar el valor del arco correspondiente.

Hallar los logaritmos de las lineas trigonométricas de un arco, que no se encuentre en las tablas.

Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, que no se halle en las tablas, calcular el arco correspondiente.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LOS TRIÁNGULOS.

65. *Teoremas para la resolución de los triángulos rectángulos.* Pág. 123.

Los teoremas fundamentales para la resolución numérica de los triángulos rectángulos, son los siguientes:

1.° El radio de las tablas es á la hipotenusa del triángulo, como el seno de un ángulo agudo es al cateto opuesto, ó bien, como el coseno de un ángulo agudo es al cateto adyacente.

2.° El radio de las tablas es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente es el cateto opuesto á dicho ángulo.

3.° El cuadrado ó segunda potencia de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración de cada uno de estos teoremas.

Consecuencias que se deducen de los mismos, suponiendo el radio igual á la unidad.

66. *Resolver un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.* Pág. 124.

Siendo los datos a y b, deducir las fórmulas para hallar el otro cateto c y los ángulos agudos B y C.

Su aplicación á un caso particular por ejemplo.

a=125,2 metros y b=81 metros.

67. *Resolver un triángulo rectángulo dada la hipoteuusa y un ángulo agudo.* Pág. 124.

Siendo los datos a y B, deducir las fórmulas para hallar el otro ángulo C. y los catetos b y c.

Su aplicación al ejemplo particular que sigue.

a=500 metros y B=50°...30'

68. *Resolver un triángulo rectángulo conocidos los dos catetos.* Pág. 124.

Fórmulas para hallar las incógnitas de este problema, que son los dos ángulos agudos y la hipotenusa.

Aplicación de estas fórmulas en el supuesto:

b=1850 metros y c=1110 metros.

69. *Resolver un triángulo rectángulo dado un cateto y uno de los ángulos agudos.*

Siendo los datos b y B, deducir las fórmulas para calcular el otro ángulo C, la hipotenusa a y el cateto c.

Aplicación de estas fórmulas á un caso particular:

b=1850 metros y B=50°...30'.

70. *Teoremas para la resolución de los triángulos oblicuángulos.* Pág. 126.

Los teoremas fundamentales para la resolución de los triángulos oblicuángulos, son los siguientes:

1.° Los senos de sus ángulos son entre sí como sus lados opuestos.

2.° La suma de dos lados de un triángulo, es á su diferencia como la tangente de la semi-suma de los ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la semi-diferencia.

3.° El cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido.
Demostración de cada uno de estos teoremas.

71. *Resolver un triángulo dado un lado y dos ángulos.* Pág. 127.

Siendo los datos *a*, B y C, hallar las fórmulas para calcular los valores del otro ángulo A, y los de los lados *b* y *c*.
Aplicación: a=1000 metros, B=60° y C=80°

72. *Resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.* Páp. 128.

Si los datos son *a*, *b* y C, las incógnitas serán A, B y *c*.
Fórmula para hallar la tangente de $\frac{1}{2}$ (A—B); y por consiguiente los valores de cada una de las incógnitas de este problema.
Suponiendo a=150 metros, b=180 y C=117°, calcular los valores de los ángulos A y B, y el del tercer lado c.

73. *Resolver un triángulo dados dos lados y uno de los ángulos opuestos.* Pág. 129.

Suponiendo los datos *a*, *b* y A, deducir las fórmulas que determinan los valores de las incógnitas C, B y *c*.
Discusión de este problema.
Su resolución en los casos siguientes:

a=85,5	metros,	b=38,4,	A=128°,5'
a=60,2	»	b=85,9	A=40° 50'

74. *Resolver un triángulo conocidos sus tres lados.* Pág. 130.

Las incógnitas en este caso son los ángulos A, B y C.
Fórmulas de cos A, cos B, y cos C, en función de los tres lados.
Transformación de las fórmulas anteriores en otras logarítmicas para hallar el seno, coseno y tangentes de la mitad de los ángulos A, B y C; y por consiguiente, el valor de estos mismos ángulos.
Siendo a=200, b=250 y c=300 metros, resolver el triángulo.